DS2 VERSION A

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Exercice 1 *Un exemple.*
On considère une fonction f définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que

- f et f' sont bornées sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions f et f' n'admettent pas de limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

1. Dessiner le graphe d'une fonction f qui satisfait aux conditions précédentes.
2. Cette fonction f étant donnée, on définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante

$$g(x) = \begin{cases} x^3 f\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0. \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

   a. Montrer que cette fonction g est continue en 0.

   b. Montrer à l'aide du taux d'accroissement que g est dérivable en 0.

   c. Exprimer la dérivée de g en tout point $x \neq 0$ en fonction de f et de sa dérivée f'.

   d. Déduire des deux questions précédentes que g' n'est pas dérivable en 0.

   e. Montrer que g admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

3. De quelle propriété du cours vient-on de montrer que la réciproque était fausse ?

Exercice 2 **EDHEC** 2025 Problème.
Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul.

On dispose de $n+1$ urnes, numérotées de 1 à $n+1$, et contenant chacune n boules.

Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, l'urne numéro k contient $k-1$ boules noires, les autres boules étant blanches (ainsi, l'urne numérotée 1 ne contient que des boules blanches et l'urne numérotée $n+1$ ne contient que des boules noires).

L'épreuve consiste à choisir une urne au hasard et à y effectuer indéfiniment des tirages au hasard d'une boule, avec remise de la boule tirée dans l'urne dont elle provient après chaque tirage.

Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, on note U_k l'événement : "On a choisi l'urne numérotée k".

On appelle X_n la variable aléatoire qui prend la valeur 0 si l'on n'obtient aucune boule blanche au cours de l'épreuve et qui prend la valeur j ($j \in \mathbb{N}^*$) si la première boule blanche apparaît au j ième tirage.

Pour finir, on rappelle les commandes Python suivantes qui permettent de simuler certaines variables discrètes usuelles :

- `rd. randint(a, b+1)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$.
- `rd.binomial(n,p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p
- `rd. geometric(p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

1. Simulation de X_n : pour tout j de $[\![2, n+1]\!]$, on code les $j-1$ boules noires de l'urne numérotée j par les entiers de $[\![1, j-1]\!]$. Compléter alors la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie la valeur prise par X_n lors de l'épreuve aléatoire décrite ci-dessus :

```python
def varX(n):
    k=------# choix de l'urne
    if k==n+1:
        X=------
    elif k==1:
        X=------
    else:
        X=1
        while rd.randint(1,n+1)<=------:
            X=--------
    return (X)
```

2. Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, déterminer $P(U_k)$.

3. **a.** Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, donner la loi de X_n, conditionnellement à l'événement U_k.

b. En conservant, sans les écrire de nouveau, les 6 premières lignes de la fonction Python précédente, compléter les 3 lignes suivantes afin d'obtenir une nouvelle simulation de X_n :

```python
else:
    X=-------
return (X)
```

4. **a.** Déterminer $P_{U_{n+1}}(X_n = 1)$.

b. Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, donner $P_{U_k}(X_n = 1)$.

c. Montrer alors que $P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$.

5. Soit j un entier supérieur ou égal à 2 .

a. Déterminer $P_{U_{n+1}}(X_n = j)$.

b. Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, donner $P_{U_k}(X_n = j)$.

c. En déduire l'égalité :

$$P(X_n = j) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j} \right]$$

6. **a.** Justifier que, pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, on a : $\sum\limits_{j=2}^{+\infty} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j} \right] = \frac{k}{n}$.

b. Calculer $P(X_n \geqslant 2)$ en fonction de n.

7. **a.** Déduire des deux questions précédentes l'expression de $P(X_n = 0)$ en fonction de n.

b. Aurait-on pu anticiper ce dernier résultat sans aucun calcul ?

8. **a.** Montrer que X_n possède une espérance $E(X_n)$ donnée par :

$$E(X_n) = \frac{n}{n+1} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$$

b. **Informatique** : calcul et affichage de $E(X_n)$.
Compléter le script suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher $E(X_n)$:

```python
n=int(input('entrez la valeur de n :'))
v=np.arange(1,n+1)
E=------
print(E)
```

9. **a.** Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{p+1} \leqslant \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{p}$.

b. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, l'encadrement : $\sum\limits_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leqslant \ln(n) \leqslant \sum\limits_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$.

c. Établir enfin l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}, \ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leqslant \ln(n) + 1$$

d. Utiliser l'encadrement précédent pour donner l'équivalent le plus simple possible de $E(X_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3 D'après **ECRICOME** 2025 Exercice 1.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

On note 0_3 la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice C de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on note E_C l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $CM + MC = 0_3$.

1. Déterminer les ensembles E_{0_3} et E_{I_3}.

2. Montrer que, pour toute matrice C de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble E_C est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Soit M une matrice de E_A. Montrer que ${}^tM$ appartient à E_A.

4. **a.** **cubes uniquement** Justifier que A est diagonalisable.

b. Soit λ un réel. Montrer que si $A - \lambda \mathrm{I}$ n'est pas inversible pour les seules valeurs de λ qui vérifient

$$\lambda^3 - 9\lambda = 0.$$

c. Résoudre l'équation précédente d'inconnue λ. On note λ_1, λ_2 et λ_3 les trois solutions.

d. Résoudre les trois systèmes d'inconnues $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,

$$AX = \lambda_1 X, \qquad AX = \lambda_2 X \qquad \text{et} \qquad AX = \lambda_3 X,$$

où λ_1, λ_2 et λ_3 ont été déterminées à la question précédente.

e. On note P la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comment a été construite la matrice P ? Calculer P^2. En déduire P^{-1} puis expliciter la matrice $P^{-1}AP$. On note $D = P^{-1}AP$.

Dans toute la suite de l'exercice, D et P désignent les matrices introduites à la question **4.e**

5. **a.** Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Montrer que N appartient à E_D si et seulement si $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. En déduire une base $\mathscr{B}$ de l'espace vectoriel E_D et préciser la dimension de E_D.

6. **a.** Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}MP$. Montrer que M appartient à E_A si et seulement si N appartient à E_D.

b. En déduire une base de l'espace vectoriel E_A exprimée à l'aide de P et des matrices de $\mathscr{B}$.

7. Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $(A+M)^2 = A^2 + M^2$.
On ne cherchera pas à expliciter les coefficients de M.

8. Soit φ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par : $\forall M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), \varphi(M) = AM + MA$.
En utilisant certains résultats des questions précédentes, déterminer le rang de φ.

Exercice 4 **ECRICOME** 2025 Exercice 2.

1. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$ est convergente.

On note pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$.

b. Calculer I_0 et I_1.

2. Montrer que, pour tout réel x positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\, \mathrm{d}t$ est convergente.

On considère la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\, \mathrm{d}t.$$

3. Expliciter la valeur de $F(0)$.

4. Soient x et y deux réels positifs tels que $x \leqslant y$. Montrer que $F(y) \leqslant F(x)$.
Que peut-on en déduire sur la fonction F ?

5. **a.** Pour tout réel x positif, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\, \mathrm{d}t$.

b. Montrer que, pour tout réel x positif :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\, \mathrm{d}t$$

c. Montrer que, pour tout réel x strictement positif :

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

d. À l'aide des questions précédentes, déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

6. Soit x un réel positif. On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\, \mathrm{d}t$ est convergente.

a. Montrer que :

$$F(x) - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(1-xt)\mathrm{d}t = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\, \mathrm{d}t$$

b. En déduire que :

$$0 \leqslant F(x) - I_0 + xI_1 \leqslant x^2 I_2.$$

7. **a.** En déduire que la fonction F admet le développement limité suivant au voisinage de 0 :

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + o(x).$$

b. Montrer que F est dérivable en 0 et déterminer $F'(0)$.

8. On admet que la fonction F est continue sur $[0,+\infty[$.
En tenant compte des propriétés démontrées dans cet exercice, tracer l'allure de la courbe représentative de F. On fera figurer sa tangente au point d'abscisse 0 .